全品
SINCE 1992
教育图书 功能学具 学生之家
基础教育行业专研品牌

30+年专注教育行业

全品智能作业

QUANPIN ZHINENGZUOYE

进阶手册

知识 · 易错 · 拓展

主 编 肖德好

高中数学

选择性必修第二册 RJA

CONTENTS 目录

进阶手册

第四章 数列

第五章 一元函数的导数及其应用

第四章　数列

4.1　数列的概念

层级1　知识易错易混

【知识导图】

- 数列的概念
  - 基本概念
    - 定义：按照确定的顺序排列的一列数称为数列
    - 项：数列中的每一个数称为该数列的项
    - 项数：数列中项的总个数
    - 通项公式：如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与它的序号n之间的对应关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫作这个数列的通项公式
    - 递推公式：如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫作这个数列的递推公式
    - 前n项和：数列$\{a_n\}$从第1项起到第n项止的各项之和，称为数列$\{a_n\}$的前n项和，记作S_n，即$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
  - 分类
    - 项数
      - 有穷数列：项数有限的数列
      - 无穷数列：项数无限的数列
    - 单调性
      - 递增数列：从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列
      - 递减数列：从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列
      - 常数列：各项都相等的数列
  - 数列的表示方法
    - 通项公式法
    - 列表法
    - 图象法
    - 递推公式法
  - 通项公式的求法
    - 观察猜想法—根据数列的前几项，观察规律，写出一个适合前几项的通项公式
    - 利用a_n与S_n的关系
      - 使用前提—已知前n项和S_n与项a_n或项数n的关系式
      - 解题思路
        - 首项：没有给出首项时令$n=1$求首项，给出首项时此步省略
        - 列式：当$n\geqslant 2$时，一个式子中含有S_n(题目的条件)，一个式子中含有S_{n-1}(将题目的条件中的下标从n变成$n-1$)
        - 作差：两式相减得到$n\geqslant 2$时a_n关于n的关系式
        - 检验：检验$n=1$时a_n关于n的关系式是否成立

【易错易混】数列与集合的关键区别

(1)数列中的数具有有序性，集合中的数具有无序性；

(2)数列中的数可以相同(可重复性)，集合中的数具有互异性.

例 1　(1)以下三个结论中正确的个数为　　(　　)

①1，1，1，1，…是数列；②cos 0，sin 1，tan 2 不是数列；③数列的通项公式是唯一的.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(2)下列说法正确的是 ( )

A. 数列 4,7,3,4 的首项是 4

B. 数列$\{a_n\}$中,若 $a_1=3$,则从第 2 项起,各项均不等于 3

C. 数列 3,6,8 可以表示为$\{3,6,8\}$

D. a,-3,-1,1,b,5,7,9,11 一定能构成数列

(3)将正整数的前 5 个数排列如下:

①1,2,3,4,5;②5,4,3,2,1;③2,1,5,3,4;④4,1,5,3,2.

其中可以称为数列的是 ( )

A. ① B. ①② C. ①②③ D. ①②③④

[答案] (1)B (2)A (3)D

[解析] (1)①正确,1,1,1,1,…是按一定顺序排列的一列数,符合数列的定义;②错误,cos 0,sin 1,tan 2 都是数,而且是按一定顺序排列的,所以它是数列;③错误,数列的通项公式不一定是唯一的.故选 B.

(2)对于 A,数列 4,7,3,4 的第 1 项就是首项,即 4,故 A 正确.对于 B,同一个数在一个数列中可以重复出现,故 B 错误.对于 C,数列和数的顺序有关,集合中元素具有无序性,故 C 错误.对于 D,当 a,b 都代表数时,能构成数列,当 a,b 中至少有一个不代表数时,不能构成数列,因为数列是按一定顺序排列的一列数,故 D 错误.故选 A.

(3)根据数列是按一定顺序排列的一列数,可知①②③④都正确.故选 D.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】利用数列的周期性求数列的项

(1)利用观察法或递推关系寻找数列的周期;

(2)利用周期性计算余数,进而确定对应的项.

例 2 (1)[2026·湖南长沙望城区一中高二期末] 设数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\dfrac{2-3a_n}{3+2a_n}$,且 $a_1=1$,则 a_{2026} 的值为 ( )

A. $-\dfrac{1}{5}$ B. $\dfrac{1}{5}$ C. -1 D. 1

(2)[2026·河北邯郸高二期末] 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=-\dfrac{1}{2}$,$a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$,则$\{a_n\}$的前 2026 项和 $S_{2026}=$ ( )

A. 2023 B. 2025 C. 2026 D. 2137

[答案] (1)A (2)D

[解析] (1)因为 $a_{n+1}=\dfrac{2-3a_n}{3+2a_n}$,且 $a_1=1$,所以 $a_2=\dfrac{2-3a_1}{3+2a_1}=-\dfrac{1}{5}$,$a_3=\dfrac{2-3a_2}{3+2a_2}=\dfrac{2-3\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)}{3+2\times\left(-\dfrac{1}{5}\right)}=1=a_1$,所以数列$\{a_n\}$的周期为 2,故 $a_{2026}=a_2=-\dfrac{1}{5}$,故选 A.

(2)由 $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$,$a_1=-\dfrac{1}{2}$,得 $a_2=1-\dfrac{1}{a_1}=3$,$a_3=1-\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{2}{3}$,$a_4=1-\dfrac{1}{a_3}=-\dfrac{1}{2}$,$a_5=1-\dfrac{1}{a_4}=3$,…,所以$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列,又 $a_1+a_2+a_3=\dfrac{19}{6}$,所以 $S_{2026}=675(a_1+a_2+a_3)+a_1=675\times\dfrac{19}{6}-\dfrac{1}{2}=2137$.故选 D.

【方法解读 2】利用数列的单调性求参数

1. 定义法:根据数列$\{a_n\}$的单调性,计算 $a_{n+1}-a_n$,将其化简为关于 n 和参数的不等式,根据不等式恒成立的条件求解参数范围,常常需要参变分离.

2. 函数法:将数列的通项公式视为函数 $y=f(n)$,利用函数单调性研究数列单调性,注意定义域为正整数集.求解时,利用基本函数的单调性,确定函数的单调区间,进而得到数列的单调性,结合参数条件求解.

3. 分类讨论法:当数列通项公式含参数且需分段讨论,或数列的单调性与参数的取值范围有关时,根据参数的不同取值范围,分类讨论数列的单调性,综合得出参数的取值范围.

例 3 (1)[2026·陕西西安交大附中高二期中] 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+\lambda n$,且数列$\{a_n\}$为递增数列,则实数λ的取值范围是 ( )

A. $(-\infty,-3)$　　B. $(-\infty,-2)$

C. $(-2,+\infty)$　　D. $(-3,+\infty)$

(2)(多选题)已知递增数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\cdot 2^n+\lambda n$,则λ的值可能为 ( )

A. -10　　B. -5

C. 2　　D. 6

(3)已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}-t\right)n+2,n>8,\\ t^{n-7},n\leqslant 8\end{cases}(n\in\mathbf{N}^*)$,若对任意$n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_n>a_{n+1}$,则实数$t$的取值范围是________.

[答案] (1)D　(2)BCD　(3)$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

[解析] (1)方法一:由数列$\{a_n\}$为递增数列,得$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$a_{n+1}>a_n$,又$a_n=n^2+\lambda n$,所以$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$(n+1)^2+\lambda(n+1)>n^2+\lambda n$,即$\lambda>-2n-1$,又$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$-2n-1\leqslant -3$恒成立,所以$\lambda>-3$,所以实数$\lambda$的取值范围是$(-3,+\infty)$.故选D.

方法二:因为$a_n=n^2+\lambda n=\left(n+\dfrac{\lambda}{2}\right)^2-\dfrac{\lambda^2}{4}$,数列$\{a_n\}$为递增数列,所以$-\dfrac{\lambda}{2}<\dfrac{3}{2}$,解得$\lambda>-3$,所以实数$\lambda$的取值范围是$(-3,+\infty)$.故选D.

(2)由$\{a_n\}$是递增数列,得$a_{n+1}-a_n>0$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立.因为$a_{n+1}=(n+1)\cdot 2^{n+1}+\lambda(n+1)$,所以$a_{n+1}-a_n=(n+1)\cdot 2^{n+1}+\lambda(n+1)-n\cdot 2^n-\lambda n=2^n(n+2)+\lambda>0$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立,即$\lambda>-2^n(n+2)$对任意$n\in\mathbf{N}^*$恒成立.因为函数$y=-2^x(x+2)$在$[1,+\infty)$上单调递减,所以$\lambda>-2^1\times(1+2)=-6$.故选BCD.

(3)∵对任意的$n\in\mathbf{N}^*$,都有$a_n>a_{n+1}$,∴数列$\{a_n\}$为递减数列,

故只需$\begin{cases}\dfrac{1}{3}-t<0,\\ 0<t<1,\\ \left(\dfrac{1}{3}-t\right)\times 9+2<t^{8-7},\end{cases}$解得$\dfrac{1}{2}<t<1$,故实数$t$的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

【方法解读 3】求数列通项公式的方法

(1)观察法:若已知数列的前若干项,则可通过观察规律直接写出通项公式.

(2)a_n与S_n的关系:若已知前n项和S_n与n或a_n的关系,则可利用a_n与S_n的关系式$a_n=\begin{cases}S_n,n=1,\\ S_n-S_{n-1},n\geqslant 2\end{cases}$求解.一般来说有以下两种思路:①消去$S_n$,转化为关于$a_n$的递推公式;②消去$a_n$,转化为关于$S_n$的递推公式.注意需分段讨论,验证结果.

(3)累加法:对于已知形如$a_{n+1}=a_n+f(n)$的递推公式求通项公式问题,只要$f(n)$可求和,便可利用累加法求通项公式.

(4)累乘法:对于已知形如$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=g(n)$的递推公式求通项公式问题,只要$g(n)$可求积,便可利用累乘法求通项公式.

例 4 (1)[2026·河北邢台质检] 数列$1,-\sqrt{3},\sqrt{5},-\sqrt{7},3,\cdots$的一个通项公式是 ( )

A. $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt{2n+1}$　　B. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{2n+1}$

C. $a_n=(-1)^n\cdot\sqrt{2n-1}$　　D. $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{2n-1}$

(2)[2026·吉林省实验中学高二期末] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=3$,$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$,则$a_n=$ ( )

A. $4+\dfrac{1}{n}$　　B. $4-\dfrac{1}{n}$

C. $2+\dfrac{1}{n}$　　D. $2-\dfrac{1}{n}$

(3)数列$\{a_n\}$中,若$a_1=2$,$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,则$2025a_{2026}=$________.

(4)[2026·河南郑州外国语学校高二期末] 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$S_n=3^n+2n+1$,则$a_n=$________.

[答案] (1)D (2)B (3)$\frac{2025}{1013}$ (4)$\begin{cases}6,n=1,\\2\times3^{n-1}+2,n\geqslant2\end{cases}$

[解析] (1)将数列改写为$\sqrt{1},-\sqrt{3},\sqrt{5},-\sqrt{7},\sqrt{9},\cdots$,所以$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{2n-1}$是数列$1,-\sqrt{3},\sqrt{5},-\sqrt{7},3,\cdots$的一个通项公式.故选D.

(2)因为$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,所以$a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$,$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,$a_4-a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,$\cdots$,$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geqslant2)$,所以$a_n-a_1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}(n\geqslant2)$,所以$a_n=a_1+1-\frac{1}{n}=4-\frac{1}{n}(n\geqslant2)$,又当$n=1$时,$a_1=4-\frac{1}{1}=3$也成立,所以$a_n=4-\frac{1}{n}$.故选B.

(3)若$a_1=2$,$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$,则$a_n\neq0$且$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,所以$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times2=\frac{2}{n}(n\geqslant2)$,所以$2025a_{2026}=2025\times\frac{2}{2026}=\frac{2025}{1013}$.

(4)当$n=1$时,$a_1=S_1=6$;当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+2n+1)-[3^{n-1}+2(n-1)+1]=2\times3^{n-1}+2$.因为$a_1=6$不适合上式,所以$a_n=\begin{cases}6,n=1,\\2\times3^{n-1}+2,n\geqslant2.\end{cases}$

【教材拓展】斐波那契数列

斐波那契数列(Fibonacci sequence),又称黄金分割数列,因数学家莱昂纳多·斐波那契(Leonardo Fibonacci)以兔子繁殖为例而引入,故又称为“兔子数列”,指的是这样一个数列:1,1,2,3,5,8,13,21,34,….在数学上,斐波那契数列可以定义为$F_1=1$,$F_2=1$,$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$.在现代物理、化学、艺术等领域,斐波那契数列都有直接的应用.

例5 (1)[2026·贵州毕节高二期末] 意大利数学家斐波那契以兔子繁殖为例,引入“兔子数列”:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…,即$a_1=a_2=1$,$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$,此数列在现代物理“准晶体结构”、化学等领域都有着广泛的应用.若此数列中的项被3除后的余数构成一个新数列$\{b_n\}$,则数列$\{b_n\}$的前2026项的和为 ( )

A. 2025 B. 2026 C. 2278 D. 2279

(2)(多选题)[2025·江西六校高二联考] 斐波那契数列(Fibonacci sequence),又称黄金分割数列,因数学家莱昂纳多·斐波那契以兔子繁殖为例而引入,故又称为“兔子数列”.在数学上斐波那契数列由递推公式$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$给出.已知$a_1=1$,$a_2=1$,则 ( )

A. $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2025}=a_{2027}$

B. $3a_n=a_{n-2}+a_{n+2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$

C. $\frac{a_6}{a_4}=3$

D. $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2026}=a_{2027}-1$

[答案] (1)D (2)BD

[解析] (1)由题意可得,$b_1=1$,$b_2=1$,$b_3=2$,$b_4=0$,$b_5=2$,$b_6=2$,$b_7=1$,$b_8=0$,$b_9=1$,$b_{10}=1$,…,结合$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$,可得新数列$\{b_n\}$即为按照1,1,2,0,2,2,1,0呈周期出现的数列,周期为8,易知$2026=253\times8+2$,$b_1+b_2+\cdots+b_8=9$,所以数列$\{b_n\}$的前2026项的和为$253\times9+1+1=2279$.故选D.

(2)对于A,$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2025}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2026}-a_{2024})=a_{2026}\neq a_{2027}$,故A错误.对于B,$a_{n-2}+a_{n+2}=a_{n-2}+a_{n+1}+a_n=a_{n-2}+a_{n-1}+a_n+a_n=3a_n(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$,故B正确.对于C,$\because a_1=1$,$a_2=1$,$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant3,n\in\mathbf{N}^*)$,$\therefore a_3=1+1=2$,$a_4=1+2=3$,$a_5=2+3=5$,$a_6=3+5=8$,故$\frac{a_6}{a_4}=\frac{8}{3}$,故C错误.对于D,$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2026}=(a_3-a_1)+(a_5-a_3)+(a_7-a_5)+\cdots+(a_{2027}-a_{2025})=a_{2027}-1$,故D正确.故选BD.

4.2 等差数列

层级1 知识易错易混

【知识导图】

- 等差数列
  - 定义：一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等差数列，这个常数叫作等差数列的公差，公差通常用字母d表示
  - 等差中项：如果a，A，b成等差数列，那么A叫作a与b的等差中项，$2A=a+b$
  - 通项公式：
    - $a_n=a_1+(n-1)d$或$a_n=a_m+(n-m)d$.
    - a_n的通项公式可变形为关于n的一次函数$a_n=dn+a_1-d$，则$\begin{cases} d>0，数列为递增数列， \\ d<0，数列为递减数列 \end{cases}$
  - 易错点：数列中n的取值为正整数(默认)
  - 等差数列的性质：已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则
    - (1)若m，n，p，$q\in\mathbf{N}^*$，且$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$，特别地，当$m+n=2p$时，$a_m+a_n=2a_p$.
    - (2)下标成公差为m的等差数列的项a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，...组成的新数列仍为等差数列，公差为md.
    - (3)若数列$\{b_n\}$也为等差数列，则$\{a_n\pm b_n\}$也为等差数列.
    - (4)数列$\{\lambda a_n\pm b\}$ (λ，b为常数)也为等差数列
  - 等差数列的前n项和
    - 公式：
      - $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d.$
      - 由$S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$，可得当$d=0$时，$S_n=na_1$，当$d\neq0$时，$S_n$是关于$n$且无常数项的一元二次函数，即$S_n=An^2+Bn$($A$，$B$为常数)
    - 性质：已知$\{a_n\}$为等差数列，其公差为d，前n项和为S_n，则
      - (1)S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$，...成等差数列，公差为n^2d.
      - (2)当数列的项数为偶数$2n$时，$S_{偶}-S_{奇}=nd$，$\dfrac{S_{奇}}{S_{偶}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}(a_{n+1}\neq0)$.
      - (3)当数列的项数为奇数$2n-1$时，设T_n是等差数列$\{b_n\}$的前n项和，则
        ①$S_{2n-1}=(2n-1)a_n$；②$\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{(2n-1)a_n}{(2n-1)b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}(b_n\neq0)$.
      - (4)$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$也是等差数列，其首项为$a_1$，公差为$\dfrac{d}{2}$

【易错易混】混淆数列与函数

数列是一种特殊的函数，在求解数列问题时有时可以利用函数的性质，但是在利用函数单调性求解数列问题时，要注意n的取值不是连续实数，忽略这一点很容易出错.

例 1 (1)[2026·重庆西南大学附中高二期末] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2n$,$a_1=4$,则$\frac{a_n}{n}$的最小值为 ( )

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

(2)[2026·天津三中高二月考] 一个首项为正数的等差数列中,前 3 项的和等于前 11 项的和,则当这个数列的前 n 项和最大时,$n=$ ( )

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

[答案] (1)C　(2)C

[解析] (1)由数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2n$,且$a_1=4$,可得$a_{n+1}-a_n=2n$,所以当$n\geqslant2$时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=4+2+4+\cdots+2(n-1)=4+\frac{(n-1)(2+2n-2)}{2}=n^2-n+4$,又$a_1=4$满足上式,所以$a_n=n^2-n+4$,则$\frac{a_n}{n}=\frac{n^2-n+4}{n}=n+\frac{4}{n}-1$.因为函数$y=x+\frac{4}{x}$在$(0,2]$上单调递减,在$[2,+\infty)$上单调递增,$n\in\mathbf{N}^*$,所以当$n=2$时,$\frac{a_n}{n}$取得最小值,最小值为$2+\frac{4}{2}-1=3$.故选 C.

(2)设该等差数列为$\{a_n\}$,其公差为d,前n项和为S_n.由$a_1>0$,$S_3=S_{11}$,可得$3a_1+3d=11a_1+55d$,即$a_1=-\frac{13}{2}d$,所以$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=\frac{d}{2}(n^2-14n)=\frac{d}{2}[(n-7)^2-49]$,因为$a_1>0$,所以$d<0$,所以当$n=7$时,$S_n$取得最大值.故选 C.

例 2 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1=10$,公差$d=-2$,则S_n是否存在最大值?若存在,求出S_n的最大值及取得最大值时n的值;若不存在,请说明理由.

解: 方法一:由$a_{n+1}-a_n=-2<0$,得$a_{n+1}<a_n$,所以$\{a_n\}$是递减数列.又由$a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$,可知当$n<6$时,$a_n>0$;当$n=6$时,$a_n=0$;当$n>6$时,$a_n<0$.所以$S_1<S_2<S_3<S_4<S_5=S_6>S_7>\cdots$,即当$n=5$或 6 时,$S_n$最大.因为$S_5=\frac{5}{2}\times[10+10+(5-1)\times(-2)]=30$,所以$S_n$的最大值为 30,此时$n=5$或 6.

方法二:$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n=-n^2+11n=-\left(n-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{4}$,易知二次函数$y=-\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{121}{4}(x\in\mathbf{R})$在$\left(-\infty,\frac{11}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{11}{2},+\infty\right)$上单调递减,又$n\in\mathbf{N}^*$,所以当$n$取与$\frac{11}{2}$最接近的整数,即$n=5$或 6 时,$S_n$取得最大值,最大值为 30.

层级2 解题方法拓展

【方法解读 1】方程思想之基本量运算

等差数列基本量计算主要涉及首项a_1、公差d、项数n、通项a_n和前n项和S_n这五个基本量,已知部分量,可利用等差数列通项公式与前n项和公式及已知条件构造方程求解其他量.

例 3 (1)[2026·湖南常德一中高二期末] 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为d,若$a_1=2$,$a_3+a_8=40$,则$d=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

(2)[2026·安徽马鞍山二中高二期末] 设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和,若$S_3=4$,$a_4+a_5+a_6=6$,则$S_9=$ ( )

A. 8　　B. 10　　C. 14　　D. 18

(3)(多选题)[2026·山东滨州高二期末] 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和.已知 $a_2+a_3=-12$,$a_5+a_7=2$,则下列说法正确的是 ( )

A. 数列$\{a_n\}$的公差为 2

B. 当 S_n 取最小值时,$n=6$

C. $S_3=S_7$

D. 数列$\{|a_n|\}$的前 12 项和为 24

(4)[2026·安徽淮北高二质检] 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d>0)$,且满足 $2a_3-a_5=1$,$a_2\cdot a_4=40$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$________.

[答案] (1)C (2)D (3)AC (4)$3n-2$

[解析] (1)由题意知,$a_3+a_8=2a_1+9d=40$,又 $a_1=2$,所以 $d=4$.故选 C.

(2)方法一:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_4+a_5+a_6=(a_1+3d)+(a_1+4d)+(a_1+5d)=3a_1+12d=6$,又 $S_3=3a_1+\frac{3\times(3-1)}{2}d=4$,所以 $a_1=\frac{10}{9}$,$d=\frac{2}{9}$,所以 $S_9=9a_1+\frac{9\times(9-1)}{2}d=9\times\frac{10}{9}+\frac{9\times(9-1)}{2}\times\frac{2}{9}=18$,故选 D.

方法二:因为$\{a_n\}$是等差数列,S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和,所以 S_3,S_6-S_3,S_9-S_6 仍成等差数列,由 $S_3=4$,$a_4+a_5+a_6=6$ 知 $S_6-S_3=a_4+a_5+a_6=6$,$S_6=S_3+a_4+a_5+a_6=4+6=10$,所以 4,6,$S_9-10$ 成等差数列,所以 $2\times6=4+(S_9-10)$,解得 $S_9=18$.

(3)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由题意知 $a_2+a_3=2a_1+3d=-12$①,$a_5+a_7=2a_1+10d=2$②,联立①②解得 $a_1=-9$,$d=2$,故 A 选项正确;由 $a_1=-9$,$d=2$,可得等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=-9n+\frac{n(n-1)\times2}{2}=n^2-10n=(n-5)^2-25$,所以当 $n=5$ 时,S_n 有最小值-25,故 B 选项不正确;因为 $S_3=(-9)\times3+\frac{3\times(3-1)\times2}{2}=-21$,$S_7=(-9)\times7+\frac{7\times(7-1)\times2}{2}=-21$,所以 $S_3=S_7$,故 C 选项正确;数列$\{|a_n|\}$的前 12 项和为 $|-9|+|-7|+|-5|+|-3|+|-1|+1+3+5+7+9+11+13=74$,故 D 选项不正确.故选 AC.

(4)由 $2a_3-a_5=1$,$a_2\cdot a_4=40$,得 $\begin{cases}2a_1+4d-(a_1+4d)=1,\\(a_1+d)(a_1+3d)=40,\end{cases}$ 又 $d>0$,解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=3,\end{cases}$ 所以 $a_n=3n-2$.

【方法解读 2】等差数列的判定

(1)定义法:若数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}-a_n=d$(d 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),则$\{a_n\}$是等差数列.适用于已知数列的递推关系或能直接计算相邻两项差值的情况.

(2)等差中项法:若数列$\{a_n\}$满足 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$($n\in\mathbf{N}^*$),则$\{a_n\}$是等差数列.适用于数列的项数较多且相邻三项的关系较为明显的情况.

(3)通项公式法:若数列$\{a_n\}$的通项公式可写成 $a_n=pn+q$(p,q 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),则$\{a_n\}$是等差数列.适用于已知数列通项公式的情况.

(4)前 n 项和公式法:若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 可写成 $S_n=an^2+bn$(a,b 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$),则$\{a_n\}$是等差数列.适用于已知数列的前 n 项和公式的情况.

例4 (1)[2026·安徽十校联盟月考] 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=5$,且$a_n+a_{n+1}=6n+5$,则$a_{20}=$ ( )

A. 60　B. 62　C. 64　D. 66

(2)下列通项公式中,能得到$\{a_n\}$为等差数列的是 ( )

A. $a_n=n^2+2$　B. $a_n=2n+2$

C. $a_n=2^n+2$　D. $a_n=\log_2 n+2$

(3)数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=0$,$a_7+a_{11}=a_8$,则$\{a_n\}$的前19项和$S_{19}=$ ( )

A. 0　B. 8　C. 10　D. 19

(4)(多选题)已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-11n$,则 ( )

A. 当且仅当$n=5$时,S_n取得最小值

B. $a_n=2n-12$

C. 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列

D. $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=50$

[答案] (1)A　(2)B　(3)A　(4)BCD

[解析] (1)因为$a_n+a_{n+1}=6n+5$,所以$a_{n+1}+a_{n+2}=6n+11$,两式作差得$a_{n+2}-a_n=6$,故数列$\{a_n\}$中的偶数项构成的新数列是以a_2为首项,6为公差的等差数列,又$a_1+a_2=11$,$a_1=5$,所以$a_2=6$,故当n为偶数时$a_n=6+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times 6=3n$,故$a_{20}=60$.故选A.

(2)对于A,$a_{n+1}-a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$,不为常数,故A错误;对于B,$a_{n+1}-a_n=2(n+1)-2n=2$,为常数,故B正确;对于C,$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}-2^n=2^n$,不为常数,故C错误;对于D,$a_{n+1}-a_n=\log_2(n+1)-\log_2 n=\log_2\frac{n+1}{n}$,不为常数,故D错误.故选B.

(3)因为$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=0$,即$2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$,所以数列$\{a_n\}$为等差数列.因为$a_7+a_{11}=a_8+a_{10}$且$a_7+a_{11}=a_8$,所以$a_8+a_{10}=a_8$,得$a_{10}=0$,所以$S_{19}=\frac{(a_1+a_{19})\times 19}{2}=\frac{2a_{10}\times 19}{2}=19a_{10}=0$.故选A.

(4)对于选项A,因为$S_n=n^2-11n$,二次函数$y=x^2-11x$的图象开口向上,对称轴方程为$x=\frac{11}{2}$,n是正整数,所以当$n=5$或$n=6$时,S_n取得最小值,故A错误;对于选项B,由题意得$S_n=n^2-11n$,当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-11n-[(n-1)^2-11(n-1)]=2n-12$,当$n=1$时,$a_1=S_1=1-11=-10$,满足上式,所以$a_n=2n-12$,故B正确;对于选项C,由题意得$\frac{S_n}{n}=\frac{n^2-11n}{n}=n-11$,因为$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=(n+1)-11-(n-11)=1$,所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,故C正确;对于选项D,令$a_n=2n-12\geqslant 0$,解得$n\geqslant 6$,所以当$n\geqslant 7$时,$a_n>0$,当$n\leqslant 5$时,$a_n<0$,当$n=6$时,$a_n=0$,故$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=-a_1-a_2-a_3-a_4-a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-2S_5=50$,故D正确.故选BCD.

【方法解读 3】等差数列性质的应用

等差数列的性质在等差数列的运算中可以起到简化运算、优化解题过程的作用，要熟练掌握.

例 5 (1)[2026·湖北沙市中学高二月考] 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_4+a_8=a_7+8$，则 $a_5=$ ( )

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

(2)[2026·河北部分学校高二联考] 已知等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-1}{n+5}$，则$\frac{a_{26}}{b_{26}}=$ ( )

A. $\frac{77}{31}$　　B. $\frac{155}{57}$　　C. $\frac{149}{55}$　　D. $\frac{19}{7}$

(3)已知一个等差数列的项数为奇数，其中所有奇数项的和为 290，所有偶数项的和为 261，则此数列的项数为 ( )

A. 10　　B. 19　　C. 21　　D. 29

(4)[2026·安徽合肥高二期末] 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1+a_2+a_3+a_4=3$，$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=5$，则 $S_{20}=$ ( )

A. 10　　B. 15　　C. 20　　D. 40

[答案] (1)D　(2)D　(3)B　(4)C

[解析] (1)在等差数列$\{a_n\}$中，因为 $a_4+a_8=a_7+8$，所以 $a_5+a_7=a_7+8$，所以 $a_5=8$. 故选 D.

(2)根据等差中项的性质，可得$\frac{a_{26}}{b_{26}}=\frac{51a_{26}}{51b_{26}}=\frac{\frac{51(a_1+a_{51})}{2}}{\frac{51(b_1+b_{51})}{2}}$，又由等差数列的前 n 项和公式可得$\frac{\frac{51(a_1+a_{51})}{2}}{\frac{51(b_1+b_{51})}{2}}=\frac{S_{51}}{T_{51}}$，所以

$\frac{a_{26}}{b_{26}}=\frac{S_{51}}{T_{51}}=\frac{3\times 51-1}{51+5}=\frac{19}{7}$，故选 D.

(3)设该数列为$\{a_n\}$，项数为 $2n-1$，其前 n 项和为 S_n，则 $a_n=S_{奇}-S_{偶}=29$，$S_{2n-1}=S_{奇}+S_{偶}=551=(2n-1)a_n$，即$2n-1=\frac{551}{29}=19$，∴此数列共有 19 项. 故选 B.

(4)由题知数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，根据等差数列的性质可得 S_4，S_8-S_4，$S_{12}-S_8$，$S_{16}-S_{12}$，$S_{20}-S_{16}$ 仍成等差数列，因为 $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=3$，所以设 $S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=3+x$，则 $S_{12}-S_8=a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=3+2x$，$S_{16}-S_{12}=a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=3+3x$，$S_{20}-S_{16}=a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=3+4x=5$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

所以 $S_{20}=S_{20}-S_{16}+S_{16}-S_{12}+S_{12}-S_8+S_8-S_4+S_4=15+10x=15+10\times\frac{1}{2}=20$，故选 C.

【方法解读 4】等差数列的实际应用

解决等差数列实际应用题时，要仔细阅读题目，明确问题背景和所求目标，确定哪些量是已知的，哪些量是未知的. 识别等差关系，即判断题目中是否存在“定量”增加或减少的规律，若一组数按次序以固定差值变化，则可构建等差数列模型，同时确定关键参数，明确首项 a_1、公差 d、项数 n 等等差数列的基本要素，再选择适当公式解决.

例 6 (1)[2026·河南平顶山高二期末] 已知某砖塔有 15 层,该塔底层(第一层)的底面面积为 80 m^2,所有层的底面面积之和为 675 m^2,且该塔自下而上每层底面面积依次构成递减的等差数列,则该塔自下而上数第 6 层的底面面积为 ( )

A. 60 m^2　　B. 55 m^2　　C. 50 m^2　　D. 45 m^2

(2)[2026·青海海东高二期末]《周髀算经》中有这样一个问题:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气的日影长(单位:尺)依次成等差数列,小寒的日影长为 13.5 尺,雨水的日影长为 10.5 尺,则立夏的日影长为 ( )

A. 6.5 尺　　B. 3.5 尺　　C. 4.5 尺　　D. 5.5 尺

[答案] (1)B (2)D

[解析] (1)设该等差数列为$\{a_n\}$,公差为 d,则 $d<0$,由题意得 $a_1=80$,$n=15$,所有层的底面面积之和 $S_{15}=15\times80+\frac{15\times14}{2}d=675$,可得 $105d=-525$,解得 $d=-5$,故该塔自下而上数第 6 层的底面面积为 $a_6=a_1+(6-1)d=80-5\times5=55(m^2)$. 故选 B.

(2)根据题意,将冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种的日影长依次记作 a_1 尺,a_2 尺,…,a_{12} 尺,$a_1,a_2,\cdots,a_{12}$ 成等差数列,记公差为 d. 由题意知,$a_2=13.5$,$a_5=10.5$,则 $d=\frac{10.5-13.5}{5-2}=-1$,所以立夏的日影长为 $a_{10}=a_2+8d=13.5-8\times1=5.5$(尺). 故选 D.

【教材拓展】倒序相加法求和与裂项相消法求和

1. 倒序相加法是数列求和的一种重要方法,其核心思想是将数列的项按原顺序和倒序排列后相加,利用对称性(如首尾项之和为定值)简化计算. 本质上是利用了等差数列或具有中心对称性质的函数的求和规律.

2. 裂项相消法是求解数列求和问题的一种常用方法,其核心思想是将数列的每一项分解为两个部分之差,使得在求和过程中中间的部分项相互抵消,从而简化计算,最终仅保留首尾少数项.

例 7 (1)若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2+n$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=$ ( )

A. $\frac{100}{101}$　　B. $\frac{1}{101}$　　C. $\frac{101}{100}$　　D. $\frac{99}{100}$

(2)$f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$,数列$\{a_n\}$满足 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$,则 $a_n=$________.

[答案] (1)A (2)$\frac{n+1}{4}$

[解析] (1)由题可得$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{100}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$. 故选 A.

(2)由题意得 $f(0)+f(1)=\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\frac{1}{2}$,…,$\because a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$,$a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$,$\therefore 2a_n=\frac{n+1}{2}$,解得 $a_n=\frac{n+1}{4}$.